

# SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME DE TOUS LES NOMBRES ALGÈBRIQUES RÉELS.<sup>(1)</sup>

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publié d. l. Journ. d. Borchardt, t. 77, pag. 258.)

On nomme, en général, *nombre algébrique* réel un nombre réel  $\omega$  qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$(1) \quad a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

où  $n, a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres  $n$  et  $a_0$  sont positifs, que les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible; ces suppositions étant faites, il résulte des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre que l'équation (1) admettant pour racine un nombre algébrique réel déterminé est une équation entièrement déterminée; inversement à une équation de la forme (1) correspondent au plus autant de nombres algébriques réels racines de cette équation, qu'il y a d'unités dans le degré  $n$ .

Les nombres algébriques réels constituent par leur ensemble un système de nombres que nous désignerons par  $(\omega)$ ; ainsi qu'il résulte de considérations élémentaires, ce système  $(\omega)$  de nombres est de telle nature qu'il existe une infinité de nombres de  $(\omega)$  dont la différence avec un nom-

---

<sup>(1)</sup> M. GEORG CANTOR ayant eu la bonté de nous promettre une série d'articles nouveaux concernant ses recherches sur la théorie des ensembles, nous pensons rendre service à nos lecteurs en reproduisant d'abord ici en traduction française les principaux mémoires de M. CANTOR qui se rapportent à ce sujet; ils nous paraissent en effet indispensables à l'intelligence des nouveaux qui vont suivre et que l'auteur publiera de même en français. La traduction a été revue et corrigée par l'auteur.

*Le rédacteur.*

bre quelconque  $\alpha$  est moindre qu'une quantité donnée si petite qu'elle soit. Cette remarque rend d'autant plus frappante, au premier abord, la propriété suivante: *l'on peut faire correspondre, un à un les nombres du système*  $(\omega)$ , *aux nombres*  $\nu$  *appartenant à la série des entiers positifs, suite qui sera désignée par*  $(\nu)$ , *de telle façon qu'à chaque nombre algébrique réel*  $\omega$  *réponde un nombre entier positif déterminé*  $\nu$ , *et qu'inversement à chaque nombre entier positif*  $\nu$  *réponde un nombre réel algébrique*  $\omega$  *complètement déterminé; en d'autres termes l'on peut imaginer les nombres du système*  $(\omega)$  *rangés suivant une certaine loi en une suite infinie*

$$(2) \quad \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$

daus laquelle figurent tous les nombres de la catégorie  $(\omega)$ , chacun d'eux se trouvant dans la suite (2) à une place déterminée indiquée par l'indice correspondant. Une fois que l'on a trouvé une loi permettant de ranger ainsi les nombres de  $(\omega)$ , on en déduira d'autres de celle-là par des modifications que l'on pourra choisir à volonté; il nous suffira donc d'indiquer, comme nous le faisons dans le § 1, le mode de classement qui nous paraît reposer sur le plus petit nombre de considérations.

Pour donner une application de cette propriété du système de tous les nombres algébriques réels, j'ajoute au § 1 le § 2 dans lequel je montre que, lorsque l'on considère comme donnée sous la forme (2) une suite quelconque de nombres réels, l'on peut déterminer, dans chaque intervalle  $(\alpha \dots \beta)$  donné d'avance, des nombres  $\eta$  non contenus dans cette suite (2). En combinant les propositions contenues dans les §§ 1 et 2, l'on obtient ainsi une démonstration nouvelle du théorème suivant démontré pour la première fois par LIOUVILLE (Journ. de Math. réd. p. Liouville I<sup>e</sup> série, t. XVI, 1851): dans chaque intervalle  $(\alpha \dots \beta)$  donné d'avance il y a une infinité de nombres transcendants c'est à dire de nombres qui ne sont pas algébriques réels. De plus le théorème du § 2 donne la raison pour laquelle on ne peut pas faire correspondre un à un aux nombres entiers de la série  $(\nu)$  les nombres réels formant un système continu de nombres, c'est à dire par exemple, tous les nombres réels qui sont  $\geq 0$  et  $\leq 1$ . Je suis ainsi arrivé à trouver d'une façon nette la différence essentielle qu'il y a entre un système continu de nombres et un système de nombres de l'espèce de celui qui est formé par l'ensemble de tous les nombres algébriques réels.

# § 1.

Revenons à l'équation (1) à laquelle satisfait un nombre algébrique réel  $\omega$  et qui, d'après les suppositions faites plus haut, est une équation entièrement déterminée; appelons *hauteur* du nombre  $\omega$  la somme des valeurs absolues des coefficients augmentée du nombre  $n - 1$ ,  $n$  étant le degré de l'équation; en désignant cette hauteur par  $N$  et appliquant une notation connue pour désigner les valeurs absolues des nombres, on a, par suite,

$$(3) \quad N = n - 1 + [a_0] + [a_1] + \dots + [a_n].$$

Cette hauteur  $N$  est, par conséquent, pour chaque nombre algébrique réel, un nombre entier positif déterminée; inversement, à un nombre entier positif donné  $N$  ne correspondent qu'un nombre limité de nombres algébriques réels ayant pour hauteur  $N$ ; soit  $\varphi(N)$  ce nombre, l'on aura, par exemple,  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(2) = 2$ ,  $\varphi(3) = 4$ . Les nombres du système  $(\omega)$ , c'est à dire tous les nombres algébriques réels peuvent donc être rangés dans l'ordre suivant: on prendra comme premier nombre  $\omega_1$ , le seul nombre de hauteur  $N = 1$ ; on écrira à la suite par ordre de grandeurs croissantes les deux nombres algébriques réels de hauteur  $N = 2$  et on les désignera par  $\omega_2, \omega_3$ ; puis, à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes, on écrira les quatre nombres de hauteur  $N = 3$ ; d'une manière générale, après que l'on aura ainsi compté et classé les nombres de la catégorie  $(\omega)$  jusqu'à une hauteur déterminée  $N = N_1$ , on rangera à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes les nombres réels algébriques de hauteur  $N = N_1 + 1$ . L'on obtient ainsi le système de tous les nombres algébriques réels sous la forme:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots,$$

et l'on peut, en se reportant à cette classification, parler du  $v^{\text{ième}}$  nombre algébrique réel, sans omettre aucun nombre du système  $(\omega)$ .

## § 2.

Lorsque l'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres se succédant suivant une loi déterminée quelconque

$$(4) \quad u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots$$

l'on peut, dans chaque intervalle  $(\alpha \dots \beta)$  donné d'avance, déterminer un nombre  $\eta$  qui ne se trouve pas dans la suite (4); il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres. Voici la démonstration de ce théorème.

Partons de l'intervalle donné d'avance  $(\alpha \dots \beta)$  et soit  $\alpha < \beta$ ; désignons par  $\alpha', \beta'$  les deux premiers nombres de la suite (4) divers entre eux, qui sont distincts de  $\alpha, \beta$  et qui se trouvent dans cet intervalle, et soit  $\alpha' < \beta'$ ; désignons de même par  $\alpha'', \beta''$ , les deux premiers nombres de notre suite divers entre eux, qui se trouvent dans l'intervalle  $(\alpha' \dots \beta')$  et soit  $\alpha'' < \beta''$ ; d'après cette même loi, formons un intervalle suivant  $(\alpha''' \dots \beta''')$ , et ainsi de suite. D'après cette définition, les nombres  $\alpha', \alpha'', \dots$  sont des nombres déterminés  $u_{k_1}, u_{k_2}, \dots, u_{k_\nu}$  de notre suite (4) dont les indices  $k_\nu$  croissent constamment, et la même chose a lieu pour les nombres  $\beta', \beta'', \dots$ ; de plus les nombres  $\alpha', \alpha'', \dots$  sont de grandeurs croissantes, les nombres  $\beta', \beta'', \dots$  de grandeurs décroissantes; chacun des intervalles  $(\alpha \dots \beta), (\alpha' \dots \beta'), (\alpha'' \dots \beta''), \dots$  comprend tous ceux qui le suivent. L'on ne peut alors concevoir que deux cas.

*Où bien* le nombre des intervalles, que l'on peut former ainsi est fini; soit  $(\alpha^{(\omega)} \dots \beta^{(\omega)})$  le dernier d'entre eux; comme dans cet intervalle se trouve au plus un nombre de la suite (4), l'on peut prendre dans cet intervalle un nombre  $\eta$  qui n'appartient pas à la suite (4), et le théorème est ainsi démontré dans ce cas.

*Où bien* le nombre des intervalles ainsi formés est infini; alors, comme les nombres  $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$  croissent constamment sans croître à l'infini, ils ont une certaine limite  $\alpha^*$ ; de même les nombres  $\beta, \beta', \beta'', \dots$  qui décroissent constamment ont une certaine limite  $\beta^*$ . Si  $\alpha^* = \beta^*$  (ce qui se présente toujours en appliquant cette méthode au système  $(\omega)$  des nombres

algébriques réels), on s'assure facilement en revenant à la définition des intervalles, que le nombre  $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$  ne peut pas être compris dans notre suite; car si ce nombre  $\eta$  était compris dans notre suite, l'on aurait  $\eta = u_p$ ,  $p$  étant un indice déterminée; mais cela n'est pas possible, car  $u_p$  ne se trouve pas dans l'intervalle  $(\alpha^{(p)} \dots \beta^{(p)})$ , tandis que le nombre  $\eta$  s'y trouve d'après sa définition. Si, au contraire  $\alpha^\infty < \beta^\infty$ , tout nombre  $\eta$ , compris dans l'intervalle  $(\alpha^\infty \dots \beta^\infty)$  ou égal à l'une des limites, remplit la condition voulue de ne pas appartenir à la suite (4).

Les théorèmes, que nous venons de démontrer peuvent être généralisés de différentes façons; nous n'indiquerons ici que la proposition suivante: «soit  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$  une suite finie ou infinie de nombres linéairement indépendants, c'est à dire de nombres tels qu'il n'existe entre eux aucune équation de la forme

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0,$$

les coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_n$  étant des entiers qui ne sont pas tous nuls à la fois; concevons le système ( $\Omega$ ) de tous les nombres  $\Omega$  qui peuvent être représentés par des fonctions rationnelles à coefficients entiers des nombres donnés  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ ; alors, dans tout intervalle  $(\alpha \dots \beta)$ , il y a une infinité de nombres qui ne sont pas contenus dans le système ( $\Omega$ ).»

En effet, l'on voit, à l'aide de considérations analogues à celles qui ont été employées dans le § 1, que les nombres de la catégorie ( $\Omega$ ) peuvent être rangés en une suite de la forme

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots,$$

d'où résulte le théorème en question d'après la proposition démontrée § 2.

M. B. MININGERADE a démontré, par une réduction aux principes de GALOIS, un cas très-particulier du théorème que nous venons d'indi-

quer, à savoir le cas dans lequel les nombres  $v_1, v_2, \dots, v_r$  sont en nombre fini et dans lequel le degré des fonctions rationnelles, qui servent à former les nombres de la catégorie ( $\mathcal{Q}$ ) est donné d'avance. (Voir Math. Annalen de CLEBSCH et NEUMANN, T. III p. 497.)

Berlin, le 23 Décembre 1873.

---